VISIT…

LANZAROTE
Caliente.com

О БЕСКОНЕЧНОМ.

Л.Н.Победин

В 1925 г. на сьезде математиков, организованном Вестфальским математическим обществом в Мюнстере в память К.Вейерштрасса, Д.Гильберт прочел доклад “О бесконечном”. Русский перевод этого примечательного во многих отношениях доклада можно найти в книге “Основания геометрии”, опубликованной в 1948г. [1].

Простота формы, глубина содержания в сочетании с эмоциональной заинтересованностью и сегодня не оставляют равнодушными читающих этот текст.

Отмечая в начале доклада заслуги Вейерштрасса в обосновании анализа бесконечно малых, Гильберт замечает, что “дискуссия об основах анализа не закончилась.

Причина этого лежит в том, что значение бесконечного для математики еще не выяснено до конца”. И далее: “С давних пор никакой другой вопрос так глубоко не волновал человеческую мысль, как вопрос о бесконечном; бесконечное действовало на разум столь же побуждающе и плодотворно, как едва ли действовала какая-либо другая идея; однако ни одно другое понятие не нуждается так сильно в разъяснении, как бесконечность”. “Этими замечаниями, – заключает автор, – я хочу только показать, что окончательное выяснение сущности бесконечного выходит за пределы узких интересов специальных наук и, более того, что оно стало необходимым для чести самого человеческого разума”.

Настоящую статью можно рассматривать как отклик на этот призыв Д.Гильберта.

Действительно, что можно сказать о сущности бесконечного в начале третьего тысячелетия? Каждый, кто пытался уяснить ее, сразу обнаруживал, что бесконечность существует в двух формах: как бесконечность потенциальная и как бесконечность актуальная. Отдавая дань этой традиции, уделим и мы некоторое внимание этим формам бесконечности, тем более что при этом у нас появляется возможность высказать и свое суждение относительно каждой из этих форм.

Потенциальная бесконечность . Понятие потенциальной

О БЕСКОНЕЧНОМ.

Л.Н.Победин

В 1925 г. на съезде математиков, организованном Вестфальским математическим обществом в Мюнстере в память К.Вейерштрасса, Д.Гильберт прочел доклад “О бесконечном”. Русский перевод этого примечательного во многих отношениях доклада можно найти в книге “Основания геометрии”, опубликованной в 1948г. [1]. Простота формы, глубина содержания в сочетании с эмоциональной

заинтересованностью и сегодня не оставляют равнодушными читающих этот текст.
Отмечая в начале доклада заслуги Вейерштрасса в обосновании анализа бесконечно малых, Гильберт замечает, что “дискуссия об основах анализа не закончилась.
Причина этого лежит в том, что значение бесконечного для математики еще не
выяснено до конца”. И далее: “С давних пор никакой другой вопрос так глубоко не волновал человеческую мысль, как вопрос о бесконечном; бесконечное действовало на разум столь же

побуждающе и плодотворно, как едва ли действовала какая-либо другая идея; однако ни одно другое понятие не нуждается так сильно в разъяснении, как бесконечность”.

“Этими замечаниями, – заключает автор, – я хочу только показать, что окончательное выяснение сущности бесконечного выходит за пределы узких интересов специальных наук и, более того, что оно стало необходимым для чести самого человеческого разума”.

Настоящую статью можно рассматривать как отклик на этот призыв Д.Гильберта.

Действительно, что можно сказать о сущности бесконечного в начале третьего
тысячелетия? Каждый, кто пытался уяснить ее, сразу обнаруживал, что бесконечность существует в двух формах: как бесконечность потенциальная и как бесконечность актуальная. Отдавая дань этой традиции, уделим и мы некоторое внимание этим формам бесконечности, тем более что при этом у нас появляется возможность высказать и свое суждение относительно каждой из этих форм.
Потенциальная бесконечность .
Понятие потенциальной

бесконечности естественно возникает при построении натурального числового ряда. Если мы построим натуральное число n, то ничто не мешает нам построить число $n+1$. Если мы дошли до шага $k>n$, то можно сделать и шаг $k+1$. Ограничено ли заранее число таких шагов? Нет. Конечно, у нас может не хватить сил, физических возможностей или ресурсов на шаге t для того, чтобы сделать шаг $t+1$. Но если мы от этих ресурсных ограничений абстрагируемся, то и получаем понятие потенциальной бесконечности.

Потенциальная бесконечность есть безграничный процесс построения объектов, такой процесс, у которого нет последнего шага.
Строго говоря, о самом понятии потенциальной бесконечности больше сказать
нечего. Дальнейшие размышления по поводу этого понятия ведутся только в связи со второй формой бесконечности – актуальной бесконечностью. По этой причине можно было бы предположить, что указанные две формы бесконечности соотносятся друг с другом как две стороны одной и той же медали. Однако это не так. Сравнение с

актуальной бесконечностью используется только для того, чтобы показать и даже “доказать”, что актуальная бесконечность не существует, а единственно настоящая, естественная и надежная абстракция бесконечности – это потенциальная бесконечность. Вот характерные примеры.

“Бесконечную совокупность нельзя рассматривать как нечто законченное, данное само по себе (актуальная бесконечность), а можно рассматривать лишь как нечто становящееся, нечто такое, что можно все дальше и дальше

надстраивать над конечным (потенциальная бесконечность)” [2]. “Будем считать, что построение целого числа осуществлено, если представлено
какое-либо множество вещей, содержащее данное число элементов. Для каждого данного целого числа принципиально возможно представить себе соответствующее множество. Можно это сделать и для любого конечного числа целых чисел, но осуществить представление всех целых чисел невозможно” [3]. Согласимся, что после такого рода серьезных замечаний не так-то легко вводить понятие актуальной

бесконечности и заниматься его исследованием. Б.Больцано и Г.Кантору понадобилась недюжинная смелость, чтобы положить понятие актуальной бесконечности в основу своих теорий. После них нам это сделать гораздо легче.

Актуальная бесконечность . Под актуальной бесконечностью понимается бесконечная совокупность, построение которой завершено и элементы которой представлены одновременно. Например, мы будем иметь дело с актуальной бесконечностью, если пересчитаем весь натуральный ряд

полностью. Другой пример – бесконечная совокупность точек отрезка, которая предстоит перед нами в законченном виде.

Отдадим себе отчет в том, что актуальная бесконечность представляет собой весьма сильную идеализацию. В самом деле, она допускает не только возможность построения последующего объекта, если построен предыдущий, но и постулирует, что все возможные объекты уже построены и существуют одновременно.

Может ли бесконечное быть соединенным в одно целое? Может ли вообще актуальная бесконечность

быть обьята целиком в нашей мысли? Ведь для того чтобы составить представление о бесконечном, необходимо предварительно составить представление о каждой его части, а таких частей необозримо много. Обсуждая это возражение, Б.Больцано замечает: чтобы вообразить целое, нет необходимости представлять отдельно его части [4]. Иногда говорят, что понятие завершенной бесконечности соединяет в себе как бесконечное, так и конечное. К такой бесконечности оказываются применимы законы двузначной логики, а эти законы, являющиеся

бесспорными в области конечного, могут привести к противоречиям при использовании их применительно к актуально бесконечным совокупностям.

На это мы заметим следующее. То, что к актуальной бесконечности оказываются применимы законы двузначной логики, является как раз положительным фактом, свидетельствующим в пользу естественности этого понятия. Ведь надо согласиться, что было бы совсем неуютно остаться наедине с актуальной бесконечностью, да еще и без законов логики. Что же касается противоречий, то приведем

авторитетное суждение по этому поводу П.С.Новикова: “Если поставить вопрос – не приводит ли идея актуальной бесконечности к противоречию, то на него в настоящее время трудно что-нибудь ответить, кроме того, разве, что до сих пор такого противоречия не обнаружено” [5]. От себя же добавим, что задачей логики как раз и является обнаружение антиномий, демонстрирующих неадекватность наших идеализаций тем явлениям, которые мы изучаем в “реальности”. В актуальной бесконечности феномен бесконечности являет себя явным образом. С этой точки зрения

потенциальная бесконечность, допускающая неограниченное число шагов, не есть собственно бесконечность. На потенциальную бесконечность можно смотреть как на неопределенно конечное. Такая бесконечность лишь пытается быть бесконечностью, но, строго говоря, так ею и не становится. Только в момент актуализации мы можем убедиться в том, имеем ли мы дело с бесконечностью или нет. А поскольку мы интересуемся сущностью бесконечного, постольку и будем изучать ее в форме актуально бесконечного.

Разумеется, дискуссию о достоинствах и недостатках как актуальной, так и потенциальной бесконечности можно продолжать и дальше, но, на наш взгляд,
выявление роли бесконечности в теории познания и математике выходит за рамки сравнительного анализа этих двух форм бесконечности. Мы завершим этот краткий экскурс в сравнительный анализ цитатой из Лейбница: “Я в такой мере стою за актуальную бесконечность, что не только не допускаю, что природа боится ее, как обыкновенно выражаются, но и

признаю, что природа всюду являет именно такую бесконечность, чтобы лучше отметить совершенство своего Творца” [6].

Множества . Носителями актуальной бесконечности являются бесконечные множества.

Эти объекты положены в основу теории множеств Г.Кантора. В работе “К обоснованию учения о трансфинитных множествах” Кантор дает следующее определение: “Под множеством мы понимаем соединение в некое целое M определенных хорошо различимых предметов m нашего созерцания или нашего мышления (которые будут

называться элементами множества М)” [7].

Вообще, такого рода определения оставляют ощущение странности. Ведь хотелось бы основной объект теории понимать объективно, независимо ни от созерцания, ни от качества мышления. Действительно, в этом месте мы сталкиваемся с методологической проблемой: первоначальные объекты любой теории являются неопределяемыми понятиями, пока нет того, через что их можно определить.

Введение первоначальных объектов в рассмотрение происходит через так называемые номинальные

определения, которые, строго говоря, определениями и не являются. Правда, математики нашли выход из этого положения и вводят неопределяемые понятия с помощью аксиом, что было сделано позже Э.Цермело и Френкелем. Однако нас интересуют представления самого Г.Кантора о множествах.

В канторовском “определении” множества отметим два существенных положения:

· множества задаются актуально;

· элементы каждого множества хорошо различимы для нашего созерцания, т.е. заданы четко.

Отметим еще одно положение: в канторовской теории никаких других объектов, кроме множеств, не существует. Таким образом, любой бесконечный объект, который нам встретится, заранее объявляется множеством. Эта установка канторовской теории на всеобъемлемость понятия актуально бесконечного множества потерпела крушение в 1902 г. в связи с рассмотрением такой естественной конструкции, как "множество всех множеств". Ведь если множество всех множеств можно рассмотреть актуально, то можно рассмотреть и множество всех таких множеств,

которые не являются элементами самих себя. Обозначим такое множество через Т. С удивлением замечаем, что, с одной стороны, должно быть ТОТ, а с другой (по самому определению множества Т) – ТПТ (парадокс Рассела) [8].
Этот парадокс, который был известен и самому Кантору, указывает на природу актуально бесконечных совокупностей. Некоторые из них мы можем помыслить без противоречий как множества, а представить себе совокупность всех таких множеств как множество мы не можем. Заметим, что уже в этом месте

можно было бы обнаружить, что “множество всех множеств” является нечетко заданной совокупностью. Но исторически оказалось выбранным другое радикальное решение: осуществление множества всех множеств и некоторых его подмножеств было просто запрещено.
Вообще, наложение запрета в том смысле, что о чем-то говорить просто нельзя, и в обычной жизни не является полным решением проблемы, – ведь наличие запрета побуждает к его преодолению. Тем не менее надо признать, что такое решение оказалось весьма

действенным, и оно привело к созданию аксиоматической теории множеств ZF. В этой теории мы исходим из предположения, что существует некая огромная совокупность множеств, в которую входят все множества, уже применявшиеся в математике, и, конечно, многие другие. Эту совокупность и большинство ее подсовокупностей мы уже не имеем права представлять как множества. Более точные сведения об этой совокупности мы получим из аксиом Цермело – Френкеля, которые вобрали в себя основные истинные

утверждения о множествах в нее попавших.
В другой теоретико-множественной аксиоматике (Геделя – Бернайса) и эта совокупность, и ее подсовокупности признаются объектами исследований, но, чтобы защититься от противоречий, для них используют специальное название "класс".
Однако совокупности элементов этих классов четко выделены и, стало быть, это множества, но просто их нельзя так называть.
Другая методологическая проблема теории множеств связана с аксиомой

выбора. Эта аксиома постулирует существование функции, с помощью которой можно выбрать по одному элементу из каждого множества некоторой бесконечной совокупности множеств и образовать из этих элементов новое множество. Функция выбора имеет явно нечеткий характер. Во-первых, сама эта функция не задается никаким законом, никаким правилом. А во-вторых, если два человека применят функцию выбора к одной и той же совокупности множеств, то не существует никакой принципиальной возможности ответить на вопрос,

совпадают ли полученные множества или нет.

Аксиома выбора стала предметом серьезных дискуссий среди математиков начала XX в. Взгляды сторонников и противников этой аксиомы хорошо представлены в монографии Ф.А.Медведева [9]. С одной стороны, без аксиомы выбора невозможно построение классической теории множеств, с другой – явная нечеткость и неоднозначность функции выбора резко контрастируют с установкой канторовской теории на четкость и однозначность изучаемых объектов.

В 1963 г. П.Коэн получает неожиданное решение первой проблемы Гильберта: он доказывает независимость континуум-гипотезы [10]. Согласно этому результату появляется возможность построения разных теорий множеств в зависимости от того, принимается ли или отвергается континуум-гипотеза. Более того, появляется возможность развивать и такие теории, в которых континууму можно назначать произвольную мощность на шкале мощностей. Как относиться к такому результату?
Можно, конечно, сказать, что такова природа изучаемой реальности. Но

такой ответ не согласуется с изначальной позицией Г.Кантора: актуальные множества суть четкие и однозначные объекты этой реальности. С этого момента возникают объективные предпосылки для переосмысливания основных положений канторовской теории и развития альтернативных точек зрения.

Альтернативная теория множеств . В 1964 г. молодой чешский ученый П.Вопенка предложил новый способ построения моделей, позволяющий, помимо прочего, заново получить результаты Коэна [11]. Трудно сказать, с какого момента П.Вопенка

занялся переосмыслением канторовской теории множеств, однако в предисловии к монографии “Математика в альтернативной теории множеств” он пишет: ”Основные принципы альтернативной теории множеств и основанной на ней математики были сформулированы автором в 1973 году” [12].

Основным объектом альтернативной теории множеств (AST) являются нечетко

выделенные совокупности. П.Вопенка называет их классами (к сожалению, этот термин

задействован в аксиоматике Геделя – Бернайса, но там он имеет другой смысл). Приведем некоторые примеры классов. Скажем, совокупность ныне живущих людей выделена нечетко. Ведь если бы мы должны были решить, принадлежит ли к ней тот или иной человек, то у нас могли бы иной раз возникнуть немалые сомнения.
Аналогично не являются четко выделенными совокупности всех интересных книг в данной библиотеке, вкусных блюд и т.п. Короче говоря, почти всегда, когда мы образуем совокупность на основе какого-либо естественного свойства

(т.е. помещаем в эту совокупность все объекты с данным свойством), такие совокупности выделяются нечетко.
Множество (в классическом смысле), которое содержит в качестве подмножества некоторый класс, называется полумножеством. Можно сказать, что AST есть теория полумножеств.
Другим интересным понятием AST является понятие горизонта. Каждый наш взгляд, куда бы он ни был направлен, всегда чем-то ограничен: либо на его пути оказывается твердая граница, четко его пресекающая, либо он ограничен

горизонтом, в направлении к которому утрачивается ясность нашего видения.
Например, наш взгляд на окружающее пространство, сосредоточенный на его размерности, четко ограничен тремя измерениями. Горизонтом ограничено наше видение вдаль, а также вглубь, т.е. при взгляде на все более мелкие предметы.
Однако наш взгляд не есть только видение глазами, но понимается в самом широком смысле. По-видимому, можно говорить о горизонте нашего познания, нашего ума, нашей мысли. Сам горизонт

признается четким явлением, однако то, что лежит перед горизонтом, выделяется нечетко. Чем ближе к горизонту находится нечто, тем хуже мы его видим. Вернее, в направлении к горизонту мы встречаемся с феноменом нечеткости. Горизонт не занимает определенного положения в мире, он может перемещаться. Наиболее интересными свойствами горизонта, на наш взгляд, являются "аксиома пути к горизонту" и "статическое отдаление горизонта". Разумеется, более детальные описания этих понятий требуют отдельного рассмотрения.

Канторовская теория множеств есть теория четко заданных актуально бесконечных совокупностей. Однако в своем развитии она не может до конца избавиться от явлений нечеткости и неоднозначности. Возникает гипотеза, что проблемы классической теории множеств являются не столько проблемами изучаемой “реальности”, сколько проблемами неадекватности идеализаций, которые соответствуют этим реалиям.

В основе альтернативной теории множеств П.Вопенки лежит понятие нечетко заданной бесконечной

совокупности. Это – новый объект в основаниях математики (нечеткие множества Заде не претендуют на эту роль). В альтернативной теории разрабатывается математический аппарат (в духе классической теории множеств) для работы с нечеткими объектами.

Наличие классической и альтернативной точек зрения является безусловно положительным моментом. Сравнительный анализ этих теорий будет способствовать уяснению тех проблем, которые относятся как к основаниям, так и к обоснованию математики. Например, сравнение

классической и альтернативной бесконечности позволяет нам уже сейчас сформулировать свой (предварительный) взгляд на бесконечность: сущность бесконечности заключается в ее актуальности и нечеткости.

Примечания

1. См.: Гильберт Д. Основания геометрии. – М., 1948.
2. Генцен Г. Основания математических выводов // Математическая теория логического вывода. – М., 1967. – С.110.
3. Новиков П.С. Элементы математической логики. – М., 1959. –

С.22.
4. См.: Г.И.Рузавин. Философские проблемы оснований математики. – М., 1983. – С.85.
5. Новиков П.С. Элементы математической логики. –С.19.
6. Цит. по: Больцано Б. Парадоксы бесконечного. – Одесса, 1911.
7. Кантор Г. Труды по теории множеств. – М., – С.173.
8. См.: Клини С.К.. Введение в метаматематику. – М., 1957. – С.40.
9. См.: Медведев Ф.А. Ранняя история аксиомы выбора. – М., 1982.
10. См.: Коэн П.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. – М., 1986.

11. Проблемы Гильберта. – М., 1969. – С.78.11.
12. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств. – М. 1983.